Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2023/2024. 3. feladatsor**
5.-6. évfolyam

MEGOLDÁSOK

1.) Egy fehér, egy fekete, egy piros, egy kék és egy zöld dobozban ugyanilyen színű golyók vannak. A golyók száma összesen 10, minden említett színből két-két golyó van. Minden dobozban két-két golyó van. Melyik dobozban milyen színű golyók vannak, ha tudjuk, hogy:

a) egyik golyó sincs a vele azonos színű dobozban;
b) a piros dobozban nincs kék golyó;
c) a fehér vagy a fekete dobozba egy piros és egy zöld golyó került;
d) a fekete dobozban egy kék és egy zöld golyó van;
e) az egyik dobozban egy fehér és egy kék golyó van;
f) a kék dobozban van egy fekete golyó.

Megoldás:

A d) - ből következik, hogy **a fekete dobozban egy kék és egy zöld golyó van**. Tehát a c) figyelembe vételével következik, hogy **a fehér dobozban egy piros és egy zöld golyó van.**
Az a), b) és e) - ből következik, hogy **egy fehér és egy kék golyó csak a zöld dobozban lehet.** Mivel egy piros golyó maradt, az a) - ból következik, hogy ez csak a kékben lehet. De f) - et is figyelembe véve következik, hogy **a kék dobozban egy fekete és egy piros golyó van.** A fentiekből következik (kizárásos alapon), hogy **a piros dobozban egy fehér és egy fekete golyó van.**

2.) Józsi bácsi a piacon vásárolt egy tyúkot. Miután a tyúk tojt két tojást, a tyúkot megették vacsorára, a tojásokat pedig a keltetőgépbe tették. Józsi bácsi elhatározta, hogy amennyiben a tojásból kakas kel ki, azt felnevelik és megeszik. Amennyiben viszont a kikelt csibéből tyúk lesz, akkor addig nevelik, amíg két tojást tojik és utána azt is megeszik. A két tojást pedig szintén a keltetőgépbe teszik. Ez így ment éveken keresztül, míg egyszer azt vette észre, hogy csak kakasok maradtak, és természetesen ezeket is megették. Ezek után összeszámolta, hogy összesen 2023 kakast ettek meg. Hány tyúkot ettek meg Józsi bácsiék?

Megoldás:

Jelöljük T-vel a tyúkok, míg K-val a kakasok számát. Mivel minden tyúk két tojást tojik, ezért a Józsi bácsiék házánál kikelt tyúkok és kakasok számának összege a tyúkok számának kétszeresével egyenlő. Viszont egy tyúkot a piacon vásároltak, ezért a tyúkok és kakasok számának összege eggyel több a tyúkok számának a kétszeresénél, vagyis a következő összefüggés áll fenn: $T + K = 2 \cdot T + 1$. Ebből következik, hogy a kakasok száma eggyel több a tyúkok számánál. **Tehát összesen 2022 tyúkot ettek meg.**

Készítette:
Dr. Fülöp Zsolt

3.) A táblára felírjuk a természetes számokat 1-től 2023-ig. Azzal szórakozunk, hogy letörölünk két tetszőleges számot, és helyettük az összegüket írjuk fel. Ezt addig ismételjük, ameddig egy szám marad a táblán. Páros vagy páratlan ez a szám? Válaszodat indokold!

Megoldás:

Kezdetben a táblán 1012 páratlan szám van, vagyis a páratlan számoknak a száma páros. Ha letörölünk két tetszőleges számot, és helyettük az összegüket írjuk fel, akkor a következő esetek valamelyike lehetséges.

- Ha mindkét szám páros, akkor az összegük is páros, így a táblán a páratlan számok száma nem változik;
- Ha egy szám páros, a másik pedig páratlan, akkor az összegük páratlan, így a páratlan számok száma nem változik;
- Ha mindkét szám páratlan, akkor az összegük páros, így a páratlan számok száma 2-vel csökken.

A fenti gondolatmenetből kitűnik, hogy a táblán lévő páratlan számok száma mindig páros, mivel kezdetben páros volt és a későbbiekben vagy 2-vel csökkent vagy változatlan maradt. Az invariáns mennyiség a páratlan számok számának a paritása. Tehát a táblán maradt utolsó szám **páros lesz**.

4.) Egy sorozatot úgy képezünk, hogy növekvő sorrendben leírjuk azokat a pozitív egész számokat, amelyek 5-tel való osztási maradéka 3 vagy 4. Határozzuk meg a sorozat első 78 tagjának összegét!

Megoldás:

Kezdetben felírjuk a sorozat első néhány tagját a következőképpen:
3; 4; 8; 9; 13; 14; 18; 19; 23; 24;…..
Megfigyelhetjük, hogy a sorozat páratlan sorszámú tagjait sorba rendezve a következő sorozatot kapjuk:
3; 8; 13; 18; 23; 28;….
Hasonlóan a páros sorszámú tagok felírása után a következő sorozatot kapjuk:
4; 9; 14; 19; 24; 29;….
A sorozat első 78 tagja 39 darab páratlan sorszámú és 39 darab páros sorszámú tagból áll. A 39. tag a páratlan sorszámúak sorozatában a $3 + 38 \cdot 5 = 193$, míg a páros sorszámúak sorozatában a $4 + 38 \cdot 5 = 194$. Az első 39 tag összege a páratlan sorszámú tagok esetében $(3 + 193) \cdot 39 : 2 = 3822$, míg a páros sorszámúak esetében $(4 + 194) \cdot 39 : 2 = 3861$. **Tehát a sorozat első 79 tagjának összege $\mathbf{3822 + 3861 = 7683}$.**

Készítette:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör ***2023/2024. 3. feladatsor***
7.-8. évfolyam

MEGOLDÁSOK

1.) Van 6 db számkártyánk.

0	3	2	2	1	4

Hány 6 jegyű szám készíthető a kártyák egymás mellé helyezésével?

Megoldás:

Először jelöljük meg a két darab 2-es számkártya közül az egyiket, hogy meg tudjuk őket különböztetni egymástól. Ekkor a hatjegyű szám első helyiértékére a 0-tól különböző bármely más számkártya kerülhet. Ez 5-féle lehetőség. A következő helyiértékre már a 0 is, de az, ami az elsőre került már nem, így ez szintén 5 lehetőség. A 3. helyiértékre már csak 4-féle, aztán 3, 2, 1-féle lehetőségünk marad. Ez így összesen $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$ lehetőség. Viszont ekkor minden hatjegyű szám kétszer fog szerepelni, mert a 2-es számkártyák van jelölt és jelöletlen. Ezért az előbbi eredménynek csak a fele kell. **Tehát 300 db hatjegyű szám készíthető.**

2.) Hány 5 jegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha a számjegyeket akár többször is felhasználhatom?

Megoldás:

Az első helyiértékre a 0 kivételével bármely szám kerülhet, ez 6 lehetőség. A többi helyiértékre már bármelyik szám a hétféle közül. Ezért a keresett számok száma: $\mathbf{6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 14\,406.}$

Készítette:
Merényi Imre

3.) Hány 5 jegyű 3-mal osztható szám készíthető az 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával, ha egyiket sem lehet egynél többször felhasználni?

Megoldás:

A 3-mal való oszthatóság szabálya szerint a számjegyek összegének oszthatónak kell lennie 3-mal. A 7 számjegy összege esetünkben 21, így két olyan számjegyet kell elhagynunk, amelyek összege szintén osztható 3-mal. Ez kétféle lehetőségre bontja a feladatot: vagy két hárommal oszthatót hagyunk el (0-3; 0-6; 3-6), vagy egy 1 maradékot és egy 2 maradékot adó számot (1-2; 1-5; 4-2; 4-5)

Az első lehetőségnél az esetek száma:

0-3 elhagyásával $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

0-6 elhagyásával $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

3-6 elhagyásával $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

A második lehetőségnél az esetek száma:

1-2 elhagyásával $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

1-5 elhagyásával $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

4-2 elhagyásával $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

4-5 elhagyásával $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

Ami összesen 720 db ötjegyű számot jelent.

4.) Egy 5 házból álló házsort szeretnénk kifesteni. Hányféle kifestése létezik a házsornak, ha 4-féle festékünk van? (Egy házhoz csak egyféle festéket használunk, a festékeket nem lehet keverni.)

Megoldás:

Mivel minden ház 4-féle színűre festhető ki, ezért **a házak festésére $\mathbf{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024}$ lehetőségünk van.**

Készítette:
Merényi Imre