Váci SzC Boronkay György
Műszaki Technikum és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 – 077; 27-412-077; 30-332-4264
WEB: http://boronkay.hu e-mail: boronkay@boronkay.hu

Levelező Matematika Szakkör **2024/2025. 1. feladatsor**
5.-6. évfolyam

Játék a törtrészekkel

A mennyiségek törtrészének vizsgálata már az ókortól foglalkoztatja az embereket. Az egészrész-törtrész viszonyának tanulmányozása eredményezte a törtszámok megjelenését, illetve az ezekkel kapcsolatos műveleteket. A törtrészekkel kapcsolatos feladatoknak nagy szerepük van a mindennapokban, ezért nagyon sok gyakorlati feladat csakis a törtrészek tanulmányozásával oldható meg. Akármilyen szakmát választ valaki, elengedhetetlenül találkozik az egészrész-törtrész viszonyának a vizsgálatával. Így ezeknek a feladatoknak a tanulmányozása a matematikában is kiemelt jelentőséggel bír. Továbbá az ilyen típusú feladatok megoldása sok érdekességet rejt magában.

Mintapéldák

1.) Józsi bácsi végrendeletében a vagyonáról a következőket írta: „A 17 tehenemnek a felét a legnagyobb fiam, az egyharmadát a középső fiam, az egy kilenced részét pedig a legkisebb fiam örökölje. A teheneket levágni, darabolni nem lehet, ellenkező esetben minden vagyonomat a községháza szétosztja a szegények között.” A fiúk gondolkodóba estek, hogy miként lehet igazságosan szétosztani az örökséget, de semmiféle megoldást nem találtak. Ezért elmentek a falu bírájához, aki a következőket mondta: „Segítek nektek azzal, hogy kölcsön adom az egyik tehenemet. Cselekedjetek a végrendelet szerint, és estére hozzátok vissza a tehenemet!” Sikerült a fiúknak szétosztani az örökséget? Tényleg igazságos volt az osztozkodás?

Megoldás:

A bíró tehenével együtt a fiúknak 18 tehenük lett. Így könnyen sikerült az osztozkodás, mivel a legnagyobb fiú $18:2=9$, a középső $18:3=6$, míg a legkisebb $18:9=2$ tehenet kapott. Ez összesen 17 tehenet jelent, így a bíró tehenét estére vissza tudták vinni a gazdájához. Az osztozkodás viszont nem volt igazságos, mivel a legnagyobb fiú a tehenek $\frac{9}{17}$, a középső a tehenek $\frac{6}{17}$, a legkisebb pedig a tehenek $\frac{2}{17}$ részét kapta (ez pedig nem a tehenek felét, egy hatodát, illetve egy kilenced részét képezi).

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

2.) Mariska néni a piacra vitt egy tojással teli kosarat, melynek tartalmát a következőképpen adta el. Az első vevő megvette a tojások felét és még egy fél tojást, a második vevő megvette a megmaradt tojások felét és még egy fél tojást, a harmadik vevő megvette a megmaradt tojások felét és még egy fél tojást, így a kosárban 4 tojás maradt. Tudjuk, hogy vásárláskor egyetlen tojást sem törtek szét. Hány tojás volt eredetileg a kosárban?

Megoldás:

Elsőre a feladatban egy látszólagos ellentmondás szerepel, mivel egyetlen tojást sem törtek szét, ennek ellenére a vevők fél tojásokat is vásároltak. A kétely viszont azonnal megszűnik, ha arra gondolunk, hogy a tojások száma páratlan.
A fordított út módszerét alkalmazzuk. (Van akik a „rákmódszer" kifejezést használják.) A megmaradt 4 tojás fél tojással kevesebb, mint az utolsó „maradék" fele, tehát az utolsó „maradék" $2 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}\right) = 9$ tojás.
A 9 tojás is fél tojással kevesebb, mint az előző „maradék" fele, tehát az előző „maradék" $2 \cdot \left(9 + \frac{1}{2}\right) = 19$ tojás.
A 19 tojás is fél tojással kevesebb, mint az összes tojás fele, tehát az összes tojás $2 \cdot \left(19 + \frac{1}{2}\right) = 39$ darab.

3.) Nekeresden a falu minden felnőtt korú férfi lakosa juhász, gulyás vagy csikós. A juhászok a férfiak $\frac{1}{6}$ részét képezik. A gulyások az összes férfi harmadánál 26-tal kevesebben, míg a csikósok a férfiak számának $\frac{1}{7}$ – énél 101-gyel többen vannak. Hány juhász, gulyás illetve csikós van a faluban, külön-külön?

Megoldás:

Próbáljunk meg egyenlő nevezőjű törtekben gondolkodni. Ezek szerint a férfiak számának $\frac{7}{42}$ része juhász, a $\frac{14}{42}$ részénél 26-tal kevesebb a gulyás, míg a csikósok a férfiak számának $\frac{6}{42}$ részénél 101-gyel többen vannak. A törtrészeket összeadva $\frac{7}{42} + \frac{14}{42} + \frac{6}{42} = \frac{27}{42}$ adódik, tehát a teljes egészhez még hiányzik $\frac{42}{42} - \frac{27}{42} = \frac{15}{42}$ rész. Viszont a csikósoknál szereplő 101-es többletet, valamint a gulyásoknál szereplő 26-os hiányt figyelembe véve adódik, hogy a férfiak $\frac{15}{42}$ része $101 - 26 = 75$. Innen következik, hogy az összes férfi $\frac{1}{42}$ része $75 : 15 = 5$, míg a férfiak összesen $42 \cdot 5 = 210$ - en vannak. Ezek közül $210 : 6 = 35$ juhász, a gulyások száma $210 : 3 - 26 = 44$, míg a csikósok $210 : 7 + 101 = 131$ - en vannak.

4.) Pista bácsi minden pénzét gyermekeire hagyta a következő végrendelettel: „A legidősebb kapjon 1000 krajcárt és a maradék egytizedét, a második kapjon 2000 krajcárt és a maradék egytizedét, a harmadik kapjon 3000 krajcárt és a maradék egytizedét, és így tovább. Így minden gyermek ugyanannyi pénzt kapott. Hány gyereke volt Pista bácsinak? Mennyi pénzt osztottak szét a végrendelet szerint?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Megoldás:

Mivel az osztozkodás a legutolsó gyermeknél ért véget, ezért az ő esetében a számított maradék egytizede nulla (ellenkező esetben az osztozkodás tovább folytatódik). Ilyen módon az utolsó gyermek által kapott pénzösszeg kerek ezreseket jelent, utána pedig nulla krajcár maradt.
Az utolsó előtti gyermek ugyanannyit kapott, mint az utolsó, ezért érdemes megvizsgálni ennek a két gyermeknek az esetében az osztozkodás logikáját. Az utolsó gyermek az utolsó előttihez képest egy kerek ezressel kapott volna többet, viszont az utolsó előtti gyermek még megkapta a maradék egy tized részét (ez pedig az utolsó gyermek esetében nulla volt). Így az utolsó előtti gyermek esetében a maradék egy tized része 1000 krajcár. Tehát mielőtt az utolsó előtti gyermek megkapta volna *a maradék egytized részét* akkor összesen $10 \cdot 1000 = 10000$ krajcár volt még. Így az utolsó gyermek (és egyben mindegyik fejenként) 9000 krajcárt kapott. Visszafelé haladva az utolsó gyermek $9000 + 0$ krajcárt, az őt megelőző $8000 + 1000$ krajcárt, és így tovább, az első $1000 + 8000$ krajcárt örökölt. Könnyen kikövetkeztethető, hogy Pista bácsinak 9 gyermeke volt és $9 \cdot 9000 = 81000$ krajcárt hagyott a gyerekeire.

Gyakorló feladatok

1.) Juliska néni megszámolta az unokáit. Rájött arra, hogy az unokáinak fele és még egy fél unoka Nekeresden, a maradék kétharmada Káposztásbergenyében, a maradék negyede és még egy negyed unoka Kárittyonban, 2 unoka pedig egy tanyán él. Hány unokája van Juliska néninek?

2.) Kukutyinban a falu minden lakosa tenyészt birkát vagy kecskét. A birkatenyésztők $\frac{2}{5}$ része kecskét is tenyészt, míg a kecsketenyésztők $\frac{1}{6}$ része birkatenyésztéssel is foglalkozik. A faluban összesen 93 olyan ember él, aki csak birkatenyésztéssel foglalkozik. Hány lakosa van a falunak?

3.) János gazda így morfondírozik: „Összesen 218 juhom és kecském van. A teheneim száma egynegyede a juhok számának. Ha eladom a juhok egyharmadát és a kecskék felét, valamint vásárolok még 138 tehenet, akkor a kecskék és tehenek számának összege kétszer annyi lesz, mint a juhok száma.” Hány kecskéje, juha, illetve tehene van János gazdának külön-külön?

3.) János bácsi eladta a tehenét és azt tervezi, hogy a bevételt a kocsmában költi el, ehhez pedig tervet készít. Az első napon 3 krajcárt és a maradék egy nyolcad részét költi el, a következő napon 6 krajcárt és a maradék egy nyolcad részét, a következő napon 9 krajcárt és a maradék egy nyolcad részét, és így tovább (minden nap a krajcárok számát hárommal növeli és mellette a maradék egy nyolcad részét költi el). Az okoskodás végén megállapította, hogy minden nap ugyanannyit fog költeni. Mennyi volt a tehén ára? Hány nap alatt költötte el végül János bácsi a pénzt?

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Kitűzött feladatok

1.) Pista bácsi és Józsi bácsi egy lovat akarnak vásárolni. Pista bácsinak a pénze a ló árának $\frac{3}{4}$ részével, míg a Józsi bácsi pénze a ló árának $\frac{4}{5}$ részével egyenlő. Mivel fejenként nincs elegendő pénzük, ezért a lovat együtt vásárolják meg, és még marad 1320 krajcárjuk.
   a) Hány krajcárba kerül a ló?
   b) Melyiküknek van több pénze és mennyivel?

2.) Egy farmon a tavaszi munkákra úgy osztották be a lovakat, hogy a lovak felét és egy fél lovat szántani, a megmaradt lovak felét és egy fél lovat vetni, a maradék 10 lovat pedig fuvarozni rendeltek. Hány ló volt összesen a farmon?

3.) Pista bácsinak kétszer annyi juha van, mint kecskéje. Kiszámította, hogy ha eladná a juhok $\frac{3}{4}$ részét és a kecskék $\frac{1}{3}$ részét, akkor 14-gyel több kecskéje maradna, mint juha. Hány juha, illetve kecskéje van Pista bácsinak külön-külön?

4.) Bandi bácsi a teheneit a következőképpen osztotta szét gyerekei között. Az első gyerekének adott egy tehenet és a maradék egy kilencedét, a másodiknak 2 tehenet és az így megmaradt tehenek egy kilenced részét, a harmadiknak 3 tehenet és az így megmaradt tehenek egy kilenced részét, és így tovább. A gyerekek csodálkozva látták, hogy mindegyikük ugyanannyi tehenet kapott. Hány gyereke volt Bandi bácsinak?

Beküldési határidő: **2024.11.16.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Váci SzC Boronkay György
Műszaki Technikum és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 – 077; 27-412-077; 30-332-4264
WEB: http://boronkay.hu e-mail: boronkay@boronkay.hu

Levelező Matematika Szakkör **2024/2025. 1. feladatsor**
7.-8. évfolyam

Oszthatóság, maradékosztályok

Az oszthatóság tanulása során elhangzik néhány oszthatósági szabály. (2-vel; 4-gyel; 3-mal; 9-cel; 5-tel; 10-zel). Néhányan még a 11-gyel való osztás szabályáról is hallanak. Ezek azok a szabályok, amik elég sűrűn fordulnak elő a feladatokban ahhoz, hogy külön is foglalkozzunk velük, hiszen segítségükkel meggyorsíthatjuk a feladatok megoldását.

Az oszthatósági szabályokat azonban vizsgálhatjuk általánosan is. Ekkor nem csak arról érdemes beszélni, hogy egy szám osztható-e egy másikkal, hanem arról is, hogy milyen maradékot ad. Maradékok szempontjából azonosítjuk a maradékosztályokat. Pl. 13-mal való osztásnál 13 db maradékosztályt különböztetünk meg. A 13-mal osztható számok a 0 maradékosztályba, a 15 pl. a 2-es maradékosztályba, a 30 a 4-es maradékosztályba tartozik.

Vannak olyan megoldási praktikák, amelyek csak néhány feladat titkát tárják fel előtted. Aki azonban sok megoldási ötletet ismer azokon nehezebben fognak ki a kicsit nehezebb feladatok. A továbbiakban ehhez szeretnénk néhány ötletet, segítséget adni a mintapéldákon keresztül.

Mintapéldák

1.) Írj fel egy háromjegyű számot kétszer egymás mellé úgy, hogy egy hatjegyű számot kapj! Akárhogy választod meg a háromjegyű számot, a hatjegyű szám mindig osztható lesz 7-tel, 11-gyel, 13-mal és a háromjegyű számmal. Indokoljuk meg, miért van ez így?

<u>*Megoldás*</u>:

A hatjegyű szám a háromjegyű szám 1001-szerese. (Pl.: 234-nek 1000-szerese: 234000, ehhez adjuk az egyszeresét: 234234.) Az $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, ezért ha egy számot 1001-gyel szorozzuk, akkor biztos osztható 7-tel, 11-gyel, 13-mal. (Természetesen más számmal is osztható, de ez számunkra most nem érdekes.)

2.) Keresd meg azt a legkisebb természetes számot, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva mindig 1-et ad maradékul és 7-tel osztható!

Megoldás:

Először keressük meg azt a legkisebb természetes számot mely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal is osztható, azaz a 0-s maradékosztályt keressük. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy 2-nek, 3-nak, 4-nek, 5-nek, 6-nak is a legkisebb közös többszöröse.) A két számhoz megtanult szabályhoz hasonlóan az összes szám prímtényezős felbontásából megkapjuk, hogy a legkisebb ilyen szám a 60. Ha 60-hoz és annak többszöröseihez: 120, 180, 240, 300, … 1-et adunk az megfelel az maradékosztály feltételnek. Már csak azt kell megtalálni, hogy ezek közül melyik osztható 7-tel? A legkisebb ilyen 7-tel osztható szám a 301.

3.) Az első 15 pozitív egész számot összeszoroztuk. Hány 0 lesz a szorzat végén?

Megoldás:

Ha az 5-öt páros számmal szorozzuk mindig 0-ra végződő számot kapunk. A páros számok mindegyike osztható 2-vel és páros számból több van, mint 5-tel oszthatóból. Ezért ahány 5-ös tényező van a szorzatban annyi 0 lesz a szorzat végén.
Az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 15$ szorzatban három 5-ös tényező van, (ugyanis a $10 = 2 \cdot 5$, a 15 pedig 3-szor 5.) tehát három 0-ra fog végződni a szorzat.

Gyakorló feladatok

1.) Bizonyítsd be, hogy egy négyjegyű számot kétszer egymás mellé írva olyan számot kapunk, amely 73-mal és137-tel osztható.

2.) Van-e olyan szám, amely 4-gyel osztva 3-at, 5-tel osztva 4-et, 6-tal osztva 5-öt ad maradékul, 7-tel viszont osztható?

3.) Hány 0 lesz a $10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 24 \cdot 25$ szorzat végén?

4.) Egy új személygépkocsival 1 év alatt - ezresekre kerekítve - 23000 km-t tettek meg. Állapítsd meg pontosan, mennyit mutat a kilométeróra, ha a kilométerek száma osztható 7-tel, 9-cel és 19-cel!

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András

Kitűzött feladatok

1.) Igaz-e a következő állítás?
Ha egy négyjegyű szám két-két jegye egyenlő, akkor ez a szám osztható 11-gyel vagy 101-gyel.

2.) Oldjuk meg az alábbi klt feladatoté
a) Van-e olyan szám, amely 3-mal osztva 1-et, 4-gyel osztva 2-t, 5-tel osztva 3-at, 6-tal osztva pedig 4-et ad maradékul?
b) Egy számról annyit tudunk, hogy 2-vel osztva maradékul 1-et, 3-mal osztva maradékul 2-t ad. Mennyi lesz a maradék, ha ezt a számot 6-tal osztjuk?

3.) A pozitív egész számokat 1-től 125-ig összeszoroztuk. Hány 0-ra végződik a kapott szorzat?

4.) János bácsi a következőket mondja a gyerekeknek:
Gondoljatok egy háromjegyű számra (pl.: 674). Ezt írjátok le kétszer egymás mellé; így egy hatjegyű számot fogtok kapni (674674). Ezt a hatjegyű számot osszátok el 7-tel, maradék nem lesz. Megvan az eredmény? Jó! Akkor ehhez most adjatok hozzá 3146-ot, s amit kaptatok osszátok el 11-gyel, maradék most sem lesz. Kész? Akkor a kapott hányadost megint osszátok ezúttal 13-mal. Maradéknak ismét nem szabad lennie. Valóban nincs maradék? Akkor talán jól osztottatok. Mennyi az eredmény? A gyerekek megmondják. Abban a pillanatban János bácsi rávágja, hogy mi volt a gondolt szám. Hogyan találta ki?

Beküldési határidő: **2024.11.16.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Cs. Nagy András